УДК 519.872

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫСОКОИНТЕНСИВНОГО МАР-ПОТОКА

А.Н. Моисеев, А.А. Назаров

Томский государственный университет
E-mail: alexander-moiseev@mail.ru; anazarov@fpmk.tsu.ru

Представлено исследование МАР-потока, имеющего высокие условные интенсивности наступления событий. Показано, что в асимптотике (в условии неограниченного роста интенсивности) число событий, наступивших в таком потоке за фиксированный интервал времени, является нормальным. Получены характеристики этого распределения.

Ключевые слова:
Марковский поток событий, асимптотический анализ.

Key words:
Markovian arrival process, asymptotical analysis.

Применение специальных видов потоков событий в моделях массового обслуживания [1] позволяет сделать эти модели более адекватными реальным процессам в телекоммуникационных системах. В настоящей работе представлено исследование так называемого МАР-потока (Markovian Arrival Process) [2] в условии неограниченного роста его интенсивности. Результаты аналогичных исследований для МАР и прочих видов специальных потоков в других предельных условиях представлены в [3–5].

Итак, рассмотрим МАР-поток [6]. Пусть управляющая этим потоком цепь Маркова имеет K состояний, переходы между состояниями определяются матрицей инфинитезимальных характеристик $N\mathbf{Q}=\{Nq_{vk}\}_{v,k=\overline{1,K}}$, где скаляр N имеет смысл большой величины (в теоретическом исследовании предполагается, что $N\to\infty$). При этом матрица $\mathbf{Q}$ обладает свойством

$$q_{vv}=-\sum_{k\neq v}q_{vk},$$

или в матричном виде:

$$\mathbf{QE}=\mathbf{0}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{E}$ – единичный вектор-столбец, а $\mathbf{0}$ – нулевой вектор-столбец. Вероятность наступления события в потоке при переходе управляющей цепи Маркова из состояния v в состояние k равна d_{vk} ($k\neq v$). Величины d_{vv} будем полагать равными нулю. Эти вероятности запишем в виде матрицы $\mathbf{D}=\{d_{vk}\}_{v,k=\overline{1,K}}$.

Пусть условная интенсивность рассматриваемого потока событий в каждом из состояний управляющей цепи равна $N\lambda_k$, $k=\overline{1,K}$. Введем обозначение для матрицы условных интенсивностей:

$$N\mathbf{\Lambda}=\mathrm{diag}\{N\lambda_1,\dots,N\lambda_K\}.$$

В связи с тем, что в эту матрицу, а также матрицу инфинитезимальных характеристик $N\mathbf{Q}$, входит большой по величине параметр N, данный вид потока будем называть высокоинтенсивным марковским потоком событий или HIMAP-потоком (от High Intensive Markovian Arrival Process).

Обозначим через $m(t)$ число событий, наступивших в рассматриваемом потоке за интервал времени длительности t, а через $k(t)$ – состояние управляющей цепи Маркова в момент времени t. Рассмотрим двумерный случайный процесс $\{m(t),k(t)\}$. Введем обозначение:

$$P(m,k,t)=\mathrm{P}\{m(t)=m,k(t)=k\}.$$

Применяя формулу полной вероятности, для этого распределения можно записать следующее:

$$\begin{gathered}P(m,k,t+\Delta t)=\\=P(m,k,t)\cdot(1-N\lambda_k\Delta t)\cdot(1+Nq_{kk}\Delta t)+\\+P(m-1,k,t)N\lambda_k\Delta t+\sum_{v\neq k}P(m,v,t)Nq_{vk}(1-d_{vk})\Delta t+\\+\sum_{v\neq k}P(m-1,v,t)Nq_{vk}d_{vk}\Delta t+o(\Delta t)\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}P(m,k,t+\Delta t)-P(m,k,t)=\\=[-P(m,k,t)+P(m-1,k,t)]N\lambda_k\Delta t+\\+\sum_{v=1}^{K}P(m,v,t)Nq_{vk}(1-d_{vk})\Delta t+\\+\sum_{v=1}^{K}P(m-1,v,t)Nq_{vk}d_{vk}\Delta t+o(\Delta t),\end{gathered}$$

откуда при $\Delta t\to0$ получаем уравнение Колмогорова

$$\begin{gathered}\frac{1}{N}\frac{\partial P(m,k,t)}{\partial t}=[-P(m,k,t)+P(m-1,k,t)]N\lambda_k+\\+\sum_{v=1}^{K}[P(m,v,t)(1-d_{vk})+P(m-1,v,t)d_{vk}]Nq_{vk}.\end{gathered}$$

Домножим это уравнение справа и слева на величину e^{jum}, где $j=\sqrt{-1}$, а u – некоторая переменная, и просуммируем по $m=\overline{0,\infty}$. Тогда, введя обозначение

$$H(u,k,t)=\sum_{m=0}^{\infty}e^{jum}P(m,k,t),$$

для этой функции получим:

$$\begin{gathered}\frac{1}{N}\frac{\partial H(u,k,t)}{\partial t}=H(u,k,t)\lambda_k(e^{ju}-1)+\\+\sum_{v=1}^{K}H(u,k,t)[d_{vk}(e^{-ju}-1)+1]q_{vk}.\end{gathered} \qquad (2)$$

Обозначим вектор-строку

$$\mathbf{H}(u,t)=\{H(u,1,t),\dots,H(u,K,t)\},$$

тогда в матричном виде (2) перепишется следующим образом:

$$\frac{1}{N}\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u,t)\mathbf{\Lambda}(e^{ju}-1) +$$

$$+\mathbf{H}(u,t)[\mathbf{A}(e^{-ju}-1) + \mathbf{Q}\ ] =$$

$$= \mathbf{H}(u,t)[\mathbf{Q} + (\mathbf{\Lambda}+\mathbf{A})(e^{ju}-1)], \qquad (3)$$

где матрица $\mathbf{A}=\{q_{vk}d_{vk}\}_{v,k=\overline{1,K}}$.

Обозначим $\mathbf{B}=\mathbf{\Lambda}+\mathbf{A}$, тогда (3) перепишется в виде

$$\frac{1}{N}\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u,t)[\mathbf{Q} + \mathbf{B}(e^{ju}-1)].$$

В этом уравнении выполним замену

$$\mathbf{H}(u,t) = \mathbf{H}_2(u,t)e^{juN\lambda t},$$

где

$$\lambda = \mathbf{RBE}, \qquad (4)$$

а $\mathbf{R}$ – вектор-строка стационарного распределения вероятностей состояний управляющей потоком цепи Маркова, для него справедливо:

$$\begin{cases} \mathbf{RQ} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{RE} = 1. \end{cases} \qquad (5)$$

В результате получаем уравнение относительно функции $\mathbf{H}_2(u,t)$:

$$\frac{1}{N}\frac{\partial \mathbf{H}_2(u,t)}{\partial t}e^{juN\lambda t} + ju\lambda\mathbf{H}_2(u,t)e^{juN\lambda t} =$$

$$= \mathbf{H}_2(u,t)[\mathbf{Q} + \mathbf{B}(e^{ju}-1)]e^{juN\lambda t}$$

или

$$\frac{1}{N}\frac{\partial \mathbf{H}_2(u,t)}{\partial t} = \mathbf{H}_2(u,t)[\mathbf{Q} + \mathbf{B}(e^{ju}-1) - ju\lambda\mathbf{I}], \qquad (6)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица порядка K.

Это уравнение решим при $N\to\infty$ методом асимптотического анализа [6], обозначив $\varepsilon^2 = \frac{1}{N}$ и выполнив замены $u=\varepsilon w$ и $\mathbf{H}_2(u,t)=\mathbf{F}(w,t,\varepsilon)$. Уравнение (6) перепишется в виде:

$$\varepsilon^2\frac{\partial \mathbf{F}(w,t,\varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{F}(w,t,\varepsilon)[\mathbf{Q} + \mathbf{B}(e^{j\varepsilon w}-1) - j\varepsilon w\lambda\mathbf{I}]. \qquad (7)$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема. *Предельное при* $\varepsilon\to 0$ *значение* $\mathbf{F}(w,t)$ *решения* $\mathbf{F}(w,t,\varepsilon)$ *уравнения* (7) *имеет вид*

$$\mathbf{F}(w,t) = \mathbf{R}\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}(\lambda+\kappa)\,t\right\},$$

где

$$\kappa = 2\mathbf{f}(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{E}, \qquad (8)$$

а вектор-строка $\mathbf{f}$ *определяется уравнением*

$$\mathbf{R}(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}) + \mathbf{fQ} = \mathbf{0}. \qquad (9)$$

Доказательство выполним в три этапа.

Этап 1. Положим в (7) $\varepsilon\to 0$, получим:

$$\mathbf{F}(w,t)\mathbf{Q} = \mathbf{0}.$$

А так как имеет место свойство (5) вектора $\mathbf{R}$, векторную функцию $\mathbf{F}$ можно представить в виде

$$\mathbf{F}(w,t) = \mathbf{R}\,\Phi(w,t), \qquad (10)$$

где $\Phi(w,t)$ – некоторая скалярная функция.

Этап 2. Решение уравнения (7) будем искать в виде разложения

$$\mathbf{F}(w,t,\varepsilon) = \Phi(w,t)[\mathbf{R} + j\varepsilon w\mathbf{f}] + \mathbf{O}(\varepsilon^2), \qquad (11)$$

где $\mathbf{f}$ – некоторый вектор (вектор-строка), $\mathbf{O}(\varepsilon^2)$ – вектор-строка из бесконечно малых величин порядка ε^2. Подставляя это выражение в (7) и используя разложение $e^{j\varepsilon w}=1+j\varepsilon w+O(\varepsilon^2)$, получим:

$$\varepsilon^2[\mathbf{R} + j\varepsilon w\mathbf{f}]\frac{\partial \Phi(w,t)}{\partial t} =$$

$$= \Phi(w,t)[\mathbf{R} + j\varepsilon w\mathbf{f}][\mathbf{Q} + j\varepsilon w\mathbf{B} - j\varepsilon w\lambda\mathbf{I}] + \mathbf{O}(\varepsilon^2).$$

Отсюда, приведя подобные, сократив обе части на $j\varepsilon w$, при $\varepsilon\to 0$ получаем уравнение относительно неизвестного вектора $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{R}(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}) + \mathbf{fQ} = \mathbf{0}.$$

Этап 3. Просуммируем компоненты левой и правой частей уравнения (7). Для этого умножим справа обе части этого уравнения на единичный вектор $\mathbf{E}$ длины K:

$$\varepsilon^2\frac{\partial \mathbf{F}(w,t,\varepsilon)}{\partial t}\mathbf{E} =$$

$$= \mathbf{F}(w,t,\varepsilon)[\mathbf{Q} + \mathbf{B}(e^{j\varepsilon w}-1) - j\varepsilon w\lambda\mathbf{I}]\mathbf{E}.$$

Используя в этом уравнении разложение

$$e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + O(\varepsilon^3)$$

и учитывая (1), получаем:

$$\varepsilon^2\frac{\partial \mathbf{F}(w,t,\varepsilon)}{\partial t}\mathbf{E} =$$

$$= \mathbf{F}(w,t,\varepsilon)\left[j\varepsilon w(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\mathbf{B}\right]\mathbf{E} + O(\varepsilon^3).$$

Подставим сюда (11):

$$\varepsilon^2\frac{\partial \Phi(w,t)}{\partial t}\mathbf{RE} = \Phi(w,t)\times$$

$$\times\begin{bmatrix} j\varepsilon w\mathbf{R}(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\mathbf{RB} + \\ +(j\varepsilon w)^2\mathbf{f}(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}) \end{bmatrix}\mathbf{E} + \mathbf{O}(\varepsilon^3).$$

С учетом (4) и (5), приводя подобные и сокращая на ε^2, получаем:

$$\frac{\partial \Phi(w,t)}{\partial t} = \frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,t)[\lambda + 2\mathbf{f}(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{E}] + O(\varepsilon).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\Phi(w,t)$:

$$\frac{\partial \Phi(w,t)}{\partial t} = \frac{(jw)^2}{2}(\lambda+\kappa)\Phi(w,t),$$

где величина κ определяется выражением (8). Решение этого уравнения с учетом начального условия $\Phi(w,0)=1$, которое получается из условия

$$P(m,k,0) = \begin{cases} R_k & \text{при } m=0, \\ 0 & \text{при } m>0, \end{cases}$$

($k=\overline{1,K}$) имеет вид

$$\Phi(w,t)=\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}(\lambda+\kappa)\,t\right\}.$$

Отсюда в силу (10) имеем:

$$\mathbf{F}(w,t)=\mathbf{R}\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}(\lambda+\kappa)\,t\right\},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Решением неоднородной системы уравнений (9), вообще говоря, является семейство векторов вида

$$\tilde{\mathbf{f}}=\mathbf{f}+C\mathbf{R}, \qquad (12)$$

где $\mathbf{f}$ – частное решение неоднородной системы, а $C\mathbf{R}$ – общее решение однородной системы $\mathbf{fQ}=\mathbf{0}$ в силу первого равенства (5) (здесь C – произвольная константа). Однако нетрудно убедиться, что при подстановке любого из решений (12) выражение (8) для величины κ дает одно и то же значение.

Вернемся к функции $\mathbf{H}(u,t)$. Получаем, что при достаточно больших значениях N

$$\mathbf{H}(u,t)\approx\mathbf{R}\exp\left\{juN\lambda t+\frac{(ju)^2}{2}N(\lambda+\kappa)t\right\}.$$

Таким образом, характеристическая функция

$$h(u,t)=\mathbf{H}(u,t)\mathbf{E}$$

процесса $m(t)$ – числа событий, наступивших в высокоинтенсивном MAP-потоке, в указанных условиях имеет вид характеристической функции гауссовского распределения, то есть распределение вероятностей числа событий в HIMAP-потоке, наступивших за время t, можно аппроксимировать нормальным распределением с математическим ожиданием $N\lambda t$ и дисперсией $N(\lambda+\kappa)t$. Это подтверждается также исследованиями, выполненными средствами имитационного моделирования.

Аналогичные результаты получены и для других типов высокоинтенсивных потоков (например, рекуррентного [7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 4-е, испр. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 400 с.
2. Neuts M.F. A versatile Markovian arrival process // Journal of Appl. Prob. – 1979. – V. 16. – P. 764–779.
3. Лопухова С.В., Назаров А.А. Исследование MAP-потока методом асимптотического анализа N-го порядка // Вестник ТГУ. Серия «Информатика. Кибернетика. Математика». – 2006. – № 293. – С. 110–115.
4. Назаров А.А., Горбатенко А.Е. Асимптотический анализ системы MMP/M/1/ИПВ в условии предельно редких изменений состояний входящего потока // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 315. – № 5. – С. 187–190.
5. Назаров А.А., Семенова И.А. Асимптотический анализ систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов и полумарковским входящим потоком // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 5. – С. 12–17.
6. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
7. Moiseev A., Nazarov A. Investigation of High Intensive General Flow // Problems of Cybernetics and Informatics (PCI'2012): Proc. of the IV International Conference. – Baku, Azerbaijan, September 12–14, 2012. – P. 161–163.

Поступила 14.12.2012 г.